

CAMA 2nd edition - Basic level

24th November 2024

1 English

Problem 1. Let n be a positive integer greater than or equal to 2. Determine the maximum value that $\text{mcd}(x, y) + x + y$ can take, where x, y are integers such that $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$, and $x \neq y$.

($\text{mcd}(x, y)$ denotes the greatest common divisor of x and y)

Problem 2. Antonio writes the numbers 1, 2, ..., 100 on a board. Each minute, he erases two numbers a and b and writes the sum of the digits of the number $a + b$. After 99 minutes, only one number remains on the board. What are the possible values of this final number?

Problem 3. Gustavo paints the surface of a cube with edge length 1 such that if two points are at a distance of $\sqrt{2}$, they are painted with different colors. Determine the minimum number of different colors Gustavo could have used.

Problem 4. Find all integers n for which there exist infinitely many positive integers C, A, m, a such that $Ca - mA = 1$ and

$$(C^2 + 90CA + A^2) \cdot (m^2 + 90ma + a^2) + n$$

is a perfect square.

Problem 5. María places three spherical balls b_1, b_2 , and b_3 inside her spherical bag. The balls touch the bag at the points T_1, T_2 , and T_3 , respectively. Next, María places a flat sheet of paper inside the bag so that it rests on top of the three balls at the points P_1, P_2 , and P_3 , respectively. Prove that the lines T_1P_1 , T_2P_2 , and T_3P_3 pass through a common point.

Each problem is worth 7 points. You have 3 hours to solve as many problems as you can. Send your solutions to organizacioncama@gmail.com (You must send at most one pdf per problem and write your contestant code on each paper.)

2 Español

Problema 1. Sea n un entero positivo mayor o igual que 2. Determina el máximo valor que puede tomar $\text{mcd}(x, y) + x + y$ donde x, y son enteros con $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n$ y $x \neq y$.

($\text{mcd}(x, y)$ denota el máximo común divisor de x e y)

Problema 2. Antonio escribe los números 1, 2, ..., 100 en una pizarra. Cada minuto, borra dos números a y b y escribe la suma de los dígitos del número $a + b$. Tras 99 minutos, solo queda un número en la pizarra. ¿Cuáles son los posibles valores de este último número?.

Problema 3. Gustavo pinta la superficie de un cubo de arista 1 de manera que si dos puntos están a distancia $\sqrt{2}$ entonces están pintados de distinto color. Determina el mínimo número de colores distintos que puede haber usado Gustavo.

Problema 4. Halla todos los enteros n para los que existen infinitos enteros positivos C, A, m, a tales que $Ca - mA = 1$ y

$$(C^2 + 90CA + A^2) \cdot (m^2 + 90ma + a^2) + n$$

es un cuadrado perfecto.

Problema 5. María introduce tres bolas esféricas b_1, b_2 y b_3 en su bolsa esférica. Las bolas tocan la bolsa en los puntos T_1, T_2 y T_3 , respectivamente. A continuación, María introduce en la bolsa una hoja de papel plana que se apoya encima de las tres bolas en los puntos P_1, P_2 y P_3 , respectivamente. Demuestra que las rectas T_1P_1, T_2P_2 y T_3P_3 pasan por un punto común.

Cada problema vale 7 puntos. Tienes 3 horas para resolver tantos problemas como puedas. Envía tus soluciones a organizacioncama@gmail.com (Debes enviar como máximo un archivo pdf por problema y escribe tu código de concursante en cada hoja.)