CAMA 2nd edition - Advanced Level

24th November 2024

1 English

Problem 1. A and B play a game, which depends on a previously fixed integer $k \in \mathbb{Z}$. Initially, A has a coins and B has b coins. A and B play rounds of the game until one of them runs out of coins. A round consists of 3 steps:

1. A chooses an integer c_A and bets c_A coins (at least 1 and at most total coins he has at that time).

2. B chooses an integer c_B and bets an amount c_B coins (at least 1 and at most total coins he has at that time).

3. A chooses a positive divisor c'_A of c_A, and changes his old bet of c_A coins by one of c'_A coins. If $c'_A \geq c_B + k$, A wins the round, and otherwise B wins. In both cases, A will have c'_A coins less and B c_B coins less for the next rounds.

A wins the game if and only if he has won all the rounds and B has finished without any coins. For every positive integer b, we define $A(b)$ as the smallest positive integer for which if $a \geq A(b)$, A has a winning strategy. Find all $k \in \mathbb{Z}$ for which there are constants $u, v, w \in \mathbb{R}$ (which can depend on k) such that for every positive integer b , $|A(b) - (ub + v \ln b)| < w$.

Problem 2. Let ABC be a triangle inscribed in a circle ω and let I be its incenter. Let D be the midpoint of the arc BC in ω that contains A. Let P and Q be the intersections of the line perpendicular to AI through I with the segments AC and AB respectively. Let R be the second intersection of the circumcircles of the triangles BIP and CIQ. Prove that the points D, I, and R are aligned.

Problem 3. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ which satisfy all the following conditions:

1. For every $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$.
2. For every $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(\frac{f(x)}{y} + f(xy)) \geq \frac{y}{2f(x)}$.
3. For every $x \in [1, 2]$, $f(x) \leq 2024$.

Problem 4. Let ABC be a triangle and let P be a point within ABC such that $\angle ABP = \angle ACP$. Let Q be a point on the segment AB such that $\overline{BQ} = \overline{PQ}$. Let R be a point on the segment AC such that $\overline{CR} = \overline{PR}$. Let M be the midpoint of BC, and let N be the midpoint of segment AP. Prove that line MN intersects segment RQ at its midpoint.

Problem 5. A positive integer n is *good* if and only if there exist two permutations $(a_1, a_2, ..., a_n)$ and $(b_1, b_2, ..., b_n)$ of $(1, 2, ..., n)$ and two positive integers A and B such that $p(x) = x^3 + Ax + B$ satisfies:

$$p({a_i}^{2021} + {a_i}^{2024}) \equiv 2022\ p(b_i)^{2023} \pmod{n} \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Are there infinitely many *good* numbers?

Each problem is worth 7 points. You have 4 hours to solve as many problems as you can. Send your solutions to organizacioncama@gmail.com (you must send at most one PDF per problem and write your contestant code on each page).

2 Español

Problema 1. A y B juegan a un juego, que depende de un entero $k \in \mathbb{Z}$ previamente fijado. Inicialmente, A tiene a monedas y B tiene b monedas. A y B juegan rondas del juego hasta que alguno de los dos se quede sin monedas. Una ronda consta de 3 pasos:

1. A elige un entero c_A y apuesta una cantidad c_A monedas (al menos 1 y como máximo total de monedas que tenga en ese momento).

2. B elige un entero c_B y apuesta una cantidad c_B monedas (al menos 1 y como máximo total de monedas que tenga en ese momento).

3. A elige un divisor positivo c'_A de c_A, y cambia su antigua apuesta de c_A monedas por una de c'_A monedas. Si $c'_A \geq c_B + k$, A gana la ronda, y de lo contrario gana B. En ambos casos, A pasa a tener c'_A monedas menos y B c_B menos para la siguiente ronda.

A gana la partida si y solo si ha ganado todas las rondas y B ha acabado sin ninguna moneda. Para todo b entero positivo, definimos $A(b)$ como el menor entero positivo que garantiza que si $a \geq A(b)$, A disponga de estrategia ganadora. Halla todos los $k \in \mathbb{Z}$ para los que existen constantes $u, v, w \in \mathbb{R}$ (que pueden depender de k) tales que para todo entero positivo b, $|A(b) - (ub + v \ln b)| < w$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia ω y sea I su incentro. Sea D el punto medio del arco BC en ω que contiene a A. Sean P y Q las intersecciones de la recta perpendicular a AI por I con los segmentos AC y AB respectivamente. Sea R la segunda intersección de los circuncírculos de los triángulos BIP y CIQ. Demuestra que los puntos D, I y R están alineados.

Problema 3. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen todas estas condiciones:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(\frac{f(x)}{y} + f(xy)) \geq \frac{y}{2f(x)}$.
3. Para todo $x \in [1, 2]$, $f(x) \leq 2024$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo y sea P un punto dentro de ABC tal que $\angle ABP = \angle ACP$. Sea Q un punto en el segmento AB tal que $\overline{BQ} = \overline{PQ}$. Sea R un punto en el segmento AC tal que $\overline{CR} = \overline{PR}$. Sea M el punto medio de BC y sea N el punto medio de AP. Prueba que la recta MN corta al segmento RQ en su punto medio.

Problema 5. Un entero positivo n es *bueno* si y solo si existen 2 permutaciones $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$ de $(1, 2, ..., n)$ y 2 enteros positivos A y B tales que el polinomio $p(x) = x^3 + Ax + B$ satisface:

$$p({a_i}^{2021} + {a_i}^{2024}) \equiv 2022\ p(b_i)^{2023} \pmod n \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

¿Existen infinitos números *buenos*?

Cada problema se puntuará sobre 7 puntos. Dispones de 4 horas para resolver tantos problemas como puedas. Envía tus soluciones a organizacioncama@gmail.com (puedes enviar como máximo un PDF por problema y tienes que escribir tu código de participante en cada hoja).